

UNIDAD DE APRENDIZAJE III

INTRODUCCIÓN

Leer cuidadosamente el siguiente problema y construir un modelo matemático que dé solución a la situación.

Se sabe que el perímetro de un terreno rectangular es 150 m. Si el largo del terreno mide dos veces más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

En lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana en el período de Al-khwarizmi, al cual se le considera el padre del álgebra. El lenguaje algebraico consta principalmente de las letras de alfabeto y algunos vocablos griegos. La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética, por ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir $a + b$; donde la letra a indique que es un número cualquiera de la numeración que conocemos, b de la misma manera que a significa un número cualquiera de la numeración.

También el lenguaje algebraico ayuda mantener relaciones generales para razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier ser humano en la vida cotidiana.

Lenguaje Algebraico.

Para poder manejar el lenguaje algebraico es necesario comprender lo siguiente:

Se usan todas las letras del alfabeto.

Las primeras letras del alfabeto se determinan por regla general como constantes, es decir, cualquier número o constante como el vocablo π .

Por lo regular las letras X , Y y Z se utilizan como las incógnitas o variables de la función o expresión algebraica.

Operaciones con Lenguaje Algebraico

Aquí se presentan los siguientes ejemplos, son algunas de las situaciones más comunes que involucran los problemas de matemáticas con lenguaje algebraico; cualquier razonamiento extra o formulación de operaciones con este lenguaje se basa estrictamente en estas definiciones:

Un número cualquiera se puede denominar con cualquier letra del alfabeto, por ejemplo:

$a = \text{un número cualquiera}$

$b = \text{un número cualquiera}$

$c = \text{un número cualquiera}$

... y así sucesivamente con todos las letras del alfabeto.

La suma de dos números cualesquiera

$a + b =$ *la suma de dos números cualesquiera*

$x + y =$ *la suma de dos números cualesquiera*

La resta de dos números cualesquiera

$a - b =$ *la resta de dos números cualesquiera*

$m - n =$ *la resta de dos números cualesquiera*

La suma de dos números cualesquiera menos otro número cualquiera

$a - b + c =$ *la suma de dos números cualesquiera menos otro número cualquiera*

El producto de dos números cualesquiera

$ab =$ *el producto de dos números cualesquiera*

El cociente de dos números cualesquiera (la división de dos números cualesquiera)

$\frac{a}{b} =$ *el cociente de dos números cualesquiera*

La semisuma de dos números cualesquiera

$\frac{a + b}{2} =$ *la semisuma de dos números cualesquiera*

El semiproducto de dos números cualesquiera

$\frac{ab}{2} =$ *el semiproducto de dos números cualesquiera*

EJERCICIOS:

Representar con lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

La suma de dos números _____

La resta o diferencia de dos números _____

El producto de dos números _____

El cociente de dos números _____

El cociente de la suma de dos números, sobre la diferencia de ellos mismos _____

El doble de un número _____

El doble de la suma de dos números _____

El triple de la diferencia de dos números _____

La mitad de un número _____

La mitad de la diferencia de dos números _____

El cuadrado de un número _____

El cuadrado de la suma de dos números

El triple del cuadrado de la suma de dos números.

La suma de 3 números

La semi suma de dos números.

EXPRESIONES LITERALES.

Las expresiones como $v = \frac{d}{t}$, $F = ma$, $W = mg$, $A_T = \frac{(B+b)h}{2}$, $a = v_0t + \frac{gt^2}{2}$, $PV = nRt$, utilizadas en Física, Química o Geometría, son expresiones que utilizan letras para representar cantidades numéricas y que en sí mismas generan un número real; una vez que se conoce el valor de cada letra, se sustituye y se realizan las operaciones correspondientes. A estas expresiones se les conoce también como FÓRMULAS.

En ocasiones es necesario saber el valor de alguna de las letras de la expresión y para ello se requiere "DESPEJARLA". Para esto se utilizan las propiedades de la igualdad así como el orden jerárquico de operación.

Por ejemplo, en $A_T = \frac{(B+b)h}{2}$, para calcular el área de un trapecio, primero se _____, después se _____ y finalmente se _____. En los despejes, se procederá invirtiendo el orden jerárquico, de tal forma que si se requiere calcular el valor de B tendremos:

PRIMERO: se suprime el 2 multiplicando ambos lados de la igualdad por 2

$$2(A_T) = \left(\frac{(B+b)h}{2} \right) (2)$$

SEGUNDO: se suprime la h multiplicando ambos miembros de la igualdad por su recíproco.

$$\left(\frac{1}{h} \right) (2A_T) = ((B+b)h) \left(\frac{1}{h} \right)$$

TERCERO: se elimina b sumando a ambos lados su inverso aditivo $(-b)$

$$\frac{2A_T}{h} + (-b) = B + b + (-b)$$

El resultado final se escribe utilizando la propiedad de simetría:

$$B = \frac{2A_T}{h} -$$

APENDICE

FÓRMULAS DE USO FRECUENTE

EN EL BACHILLERATO

SÍMBOLOS

=	igual		tal que
≡	idéntico a	:	razón
≠	diferente de	$\triangle ABC$	triángulo ABC
≅	congruente con	$f(x)$	función de x
~	semejante a		paralelas a
<	menor que	⊥	perpendicular a
>	mayor que	∠	ángulos
≤	menor o igual que	°	grados
≥	mayor o igual que	°F	grados Fahrenheit
∴	por lo tanto	°C	grados Centígrados
∀	para todo	ℕ	números naturales
∃	existe	ℤ	números enteros
∄	no existe	ℚ	números racionales
∈	pertenece a	ℝ	números irracionales
∪	unión	ℝ	números reales
∩	intersección	ℂ	números complejos
∅	vacio	∞	infinito
→	entonces	∑	sumatoria
↔	si y sólo si	∫	integral

ALFABETO GRIEGO				
	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Equivalente Romano
1	A	α	Alfa	A
2	B	β	Beta	B
3	Γ	γ	Gamma	G
4	Δ	δ	Delta	D
5	E	ε	Epsilon	E
6	Z	ζ	Zeta	Z
7	H	η	Eta	H
8	Θ	θ ϑ	Teta	Q
9	I	ι	Iota	I
10	K	κ	Kappa	K
11	Λ	λ	Lambda	L
12	M	μ	Mu	M
13	N	ν	Nu	N
14	Ξ	ξ	Xi	X
15	O	ο	Omicron	O
16	Π	π ϖ	Pi	P
17	P	ρ	Rho	R
18	Σ	σ ς	Sigma	S
19	T	τ	Tau	T
20	Υ	υ	Ipsilon	U
21	Φ	φ ϕ	Phi	F
22	X	χ	Ji	C
23	Ψ	ψ	Psi	Y
24	Ω	ω	Omega	W

NOTACIÓN	
sin	Seno.
cos	Coseno.
tg	Tangente.
sec	Secante.
csc	Cosecante.
ctg	Cotangente.
vers	Verso seno.
$\arcsin \theta = \sphericalangle \sin \theta$	Arco seno de un ángulo θ .
$u = f(x)$	
sinh	Seno hiperbólico.
cosh	Coseno hiperbólico.
tgh	Tangente hiperbólica.
ctgh	Cotangente hiperbólica.
sech	Secante hiperbólica.
csch	Cosecante hiperbólica.

FORMULARIO

VALOR ABSOLUTO

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a|$$

$$a \leq |a| \text{ y } -a \leq |a|$$

$$|a| \geq 0 \text{ y } |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$|ab| = |a||b| \text{ ó } \left| \prod_{k=1}^n a_k \right| = \prod_{k=1}^n |a_k|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ ó } \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

ALGUNOS PRODUCTOS

$$a \cdot (c+d) = ac + ad$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x+b) \cdot (x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$$

$$(ax+b) \cdot (cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a-b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a-b) \cdot (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$$

$$(a-b) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \right) = a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a+b) \cdot (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a+b) \cdot (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$$

$$(a+b) \cdot (a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5) = a^6 - b^6$$

$$(a+b) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a^{n-k} b^{k-1} \right) = a^n + b^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ impar}$$

$$(a+b) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a^{n-k} b^{k-1} \right) = a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ par}$$

LOGARITMOS

$$\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a N^r = r \log_a N$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} = \frac{\ln N}{\ln a}$$

$$\log_{10} N = \log N \text{ y } \log_e N = \ln N$$

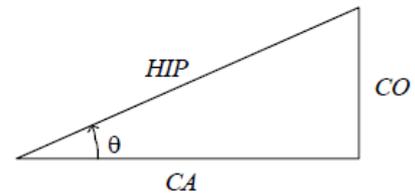
TRIGONOMETRÍA

$$\text{sen } \theta = \frac{CO}{HIP} \qquad \text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{CA}{HIP} \qquad \text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{CO}{CA} \qquad \text{ctg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \theta}$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$



θ	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/ $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2/ $\sqrt{3}$	2
45°	1/ $\sqrt{2}$	1/ $\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	1/ $\sqrt{3}$	2	2/ $\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

$$y = \angle \sin x \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$y = \angle \cos x \quad y \in [0, \pi]$$

$$y = \angle \text{tg } x \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

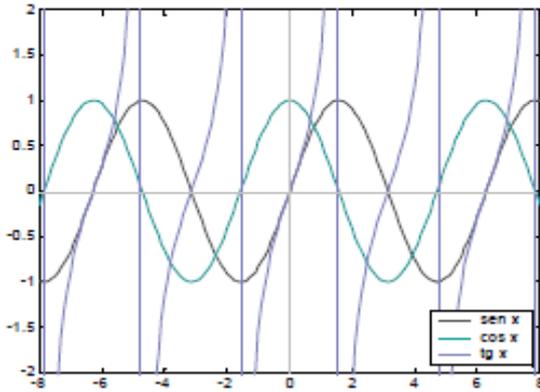
$$y = \angle \text{ctg } x = \angle \text{tg } \frac{1}{x} \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$y = \angle \text{sec } x = \angle \cos \frac{1}{x} \quad y \in [0, \pi]$$

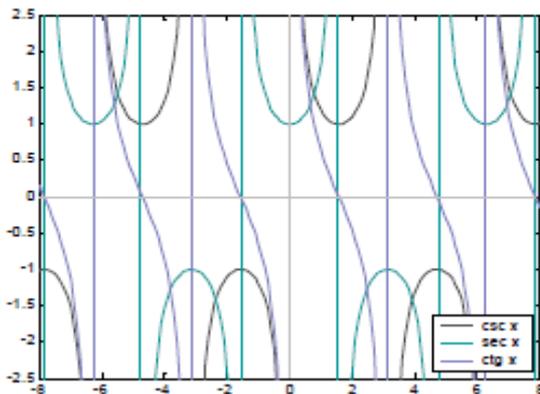
$$y = \angle \text{csc } x = \angle \text{sen } \frac{1}{x} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

TRIGONOMETRÍA

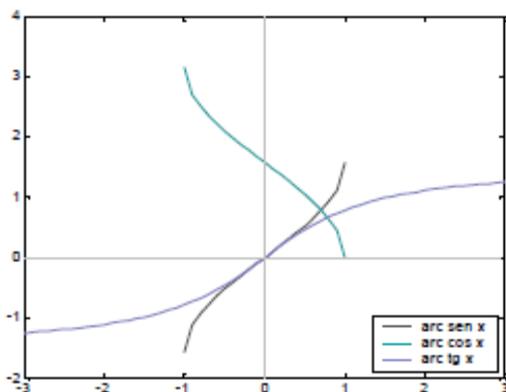
Gráfica 1. Las funciones trigonométricas: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$:



Gráfica 2. Las funciones trigonométricas $\operatorname{csc} x$, $\operatorname{sec} x$, $\operatorname{ctg} x$:



Gráfica 3. Las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$:



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \operatorname{sec}^2 \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\operatorname{tg}(\theta + 2\pi) = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin \theta$$

$$\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos \theta$$

$$\operatorname{tg}(\theta + n\pi) = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin(n\pi) = 0$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\operatorname{tg}(n\pi) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n$$

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \infty$$

$$\sin \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

EXPONENTES

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

OTRAS

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = \text{discriminante}$$

$$\exp(\alpha \pm i\beta) = e^\alpha (\cos \beta \pm i \sin \beta) \text{ si } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$$

$$\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$$

$$\operatorname{ctgh} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$$

$$\operatorname{sech} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

$$\operatorname{csch} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

LÍMITES

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2.71828\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

CONSTANTES

$$\pi = 3.14159265359\dots$$

$$e = 2.71828182846\dots$$

DERIVADAS

$$D_x f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \dots$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uvw) = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

DERIVADA DE FUNCIONES LOG & EXP

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{du/dx}{u} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log u) = \frac{\log e}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$$

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGO

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} u) = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sec} u) = \operatorname{sec} u \operatorname{tg} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} u) = -\operatorname{csc} u \operatorname{ctg} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{vers} u) = \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

DERIV DE FUNCIONES TRIGO INVER

$$\frac{d}{dx}(\angle \sin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \cos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \operatorname{tg} u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \operatorname{sec} u) = \pm \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \begin{cases} + \text{ si } u > 1 \\ - \text{ si } u < -1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \operatorname{csc} u) = \mp \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \begin{cases} - \text{ si } u > 1 \\ + \text{ si } u < -1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\angle \operatorname{vers} u) = \frac{1}{\sqrt{2u-u^2}} \frac{du}{dx}$$

INTEGRALES

$$\int a dx = ax$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int (u \pm v \pm w \pm \dots) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx \pm \dots$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{Integración por partes})$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

INTEGRALES DE FUNCIONES LOG & EXP

$$\int e^u du = e^u$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\int u a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \left(u - \frac{1}{\ln a} \right)$$

$$\int u e^u du = e^u (u - 1)$$

$$\int \ln u du = u \ln u - u = u(\ln u - 1)$$

$$\int \log_a u du = \frac{1}{\ln a} (u \ln u - u) = \frac{u}{\ln a} (\ln u - 1)$$

$$\int u \log_a u du = \frac{u^2}{4} (2 \log_a u - 1)$$

$$\int u \ln u du = \frac{u^2}{4} (2 \ln u - 1)$$

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONÓMICAS INVERSA

$$\int \angle \sin u \, du = u \angle \sin u + \sqrt{1-u^2}$$

$$\int \angle \cos u \, du = u \angle \cos u - \sqrt{1-u^2}$$

$$\int \angle \operatorname{tg} u \, du = u \angle \operatorname{tg} u - \ln \sqrt{1+u^2}$$

$$\int \angle \operatorname{ctg} u \, du = u \angle \operatorname{ctg} u + \ln \sqrt{1+u^2}$$

$$\int \angle \sec u \, du = u \angle \sec u - \ln(u + \sqrt{u^2-1})$$

$$= u \angle \sec u - \angle \cosh u$$

$$\int \angle \csc u \, du = u \angle \csc u + \ln(u + \sqrt{u^2-1})$$

$$= u \angle \csc u + \angle \cosh u$$

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONÓMICAS

$$\int \sin u \, du = -\cos u$$

$$\int \cos u \, du = \sin u$$

$$\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\operatorname{ctg} u$$

$$\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u$$

$$\int \csc u \operatorname{ctg} u \, du = -\csc u$$

$$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$$

$$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u|$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u|$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \operatorname{ctg} u|$$

$$\int \sin^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u$$

$$\int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u$$

$$\int \operatorname{tg}^2 u \, du = \operatorname{tg} u - u$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 u \, du = -(\operatorname{ctg} u + u)$$

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u$$

INTEGRALES DE FRACCIONES

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \angle \operatorname{tg} \frac{u}{a}$$

$$= -\frac{1}{a} \angle \operatorname{ctg} \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} \quad (u^2 > a^2)$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+u}{a-u} \quad (u^2 < a^2)$$

INTEGRALES CON RAÍZ CUADRA

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \angle \sin \frac{u}{a}$$

$$= -\angle \cos \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}} \right|$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \angle \cos \frac{a}{u}$$

$$= \frac{1}{a} \angle \sec \frac{u}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \angle \operatorname{sen} \frac{u}{a}$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Siendo A y B dos puntos en el plano cartesiano cuyas coordenadas están definidas por:

$$A(x_a, y_a) \text{ y } B(x_b, y_b)$$

Se definen las siguientes formulas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.		COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO (AB)
Paralelos a alguno de los ejes	Entre dos puntos en el plano	
$(\overline{AB})_x = (x_b) - (x_a)$ $(\overline{AB})_y = (y_b) - (y_a)$	$\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$	$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2} \right)$

ÁREA DE UN POLÍGONO.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1) - (x_1 y_n + \dots + x_3 y_2 + x_2 y_1)]$$

ECUACION DE LA PENDIENTE

Pendiente (m) de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	En el caso de dos rectas perpendiculares sus pendientes cumplirán la igualdad: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
--	--

ECUACIONES DE LA RECTA

Forma general $Ax + By + C = 0$	Forma Pendiente – ordenada al origen $y = mx + b$	Forma Punto – pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$
Ec. de la recta que pasa por dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ Siempre que $x_1 \neq x_2$	Distancia mínima entre la recta y un punto $d = \left \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $ Siendo las coordenadas del punto $P(x_1, y_1)$	
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		

Discriminante $B^2 - 4AC$ $B^2 - 4AC = 0$ Parábola $B^2 - 4AC < 0$ Elipse $B^2 - 4AC > 0$ Hipérbola	Semiejes a = semieje mayor b = semieje menor c = semieje focal	$e = \frac{c}{a}$ Excentricidad $e = 0$ Circunferencia $e < 1$ Elipse $e > 1$ Hipérbola $e = 1$ Parábola
--	--	---

CIRCUNFERENCIA

Con el centro en el origen $x^2 + y^2 = r^2$	Con el centro en (h, k) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Forma General $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
---	--	--

PARÁBOLA

Vertical	Con el vértice en el origen $x^2 = \pm 4py$	Con el vértice en (h, k) $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$ El signo negativo aplica cuando abre hacia abajo.	Lado recto $Lr = 4p$
Horizontal	$y^2 = \pm 4px$	$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$ El signo negativo aplica cuando abre a la izquierda.	

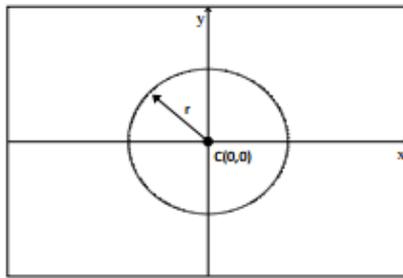
ELIPSE

	Con el centro en el origen	Con el centro en (h,k)	Relación entre a, b y c
Vertical	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$a^2 = b^2 + c^2$
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Lado recto $Lr = \frac{2b^2}{a}$

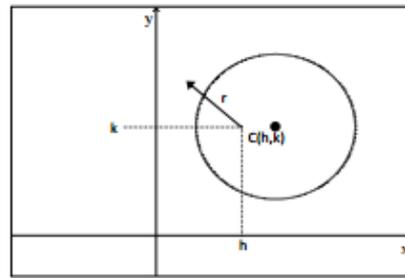
HIPERBOLA

	Con el centro en el origen	Con el centro en (h,k)	Relación entre a, b y c
Vertical	$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Lado recto $Lr = \frac{2b^2}{a}$

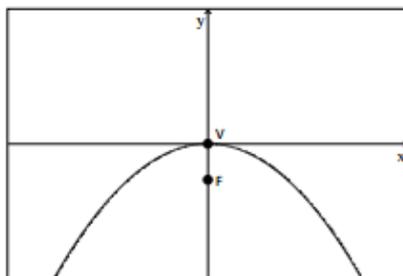
COMPLEMENTO DE GRAFICAS



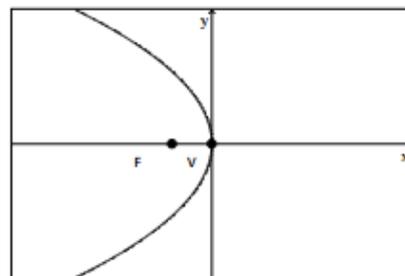
Circunferencia centrada en $C(0,0)$
(ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$)



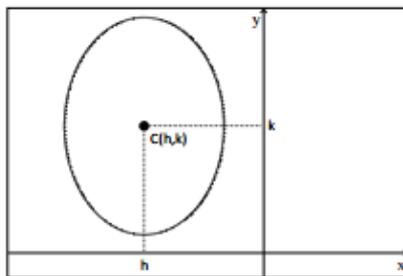
Circunferencia centrada en $C(h,k)$
(ecuación: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$)



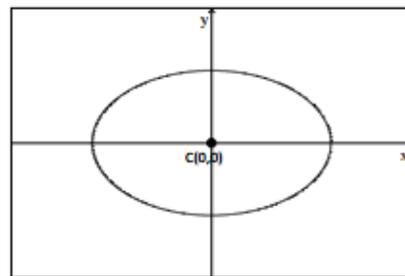
Parábola vertical que abre hacia abajo
(ecuación: $x^2 = -4py$)



Parábola horizontal que abre hacia la izq.
(ecuación: $y^2 = -4px$)



Elipse vertical centrada en $C(h,k)$
(ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$)



Elipse horizontal centrada en $C(0,0)$
(ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

CONVERSION DE GRADOS

<p>Centígrados a Fahrenheit</p> $T_{°F} = 1.8T_{°C} + 32$	<p>Fahrenheit a Centígrados</p> $T_{°C} = \frac{(T_{°F} - 32)}{1.8}$
<p>Centígrados a Kelvin</p> $T_K = T_{°C} + 273.15$	<p>Kelvin a Centígrados</p> $T_{°C} = T_K - 273.15$
<p>Centígrados a Rankine</p> $T_R = 1.8T_{°C} + 491.4$	<p>Rankine a Centígrados</p> $T_{°C} = \frac{(T_R - 491.4)}{1.8}$
<p>Kelvin a Rankine</p> $T_R = 1.8T_K$	<p>Rankine a Kelvin</p> $T_K = \frac{T_R}{1.8}$
<p>Réaumur a Kelvin</p> $K = 1.25R_e + 273.15$	<p>Kelvin a Réaumur</p> $R_e = \frac{(K - 273.15)}{1.25}$

ESTADÍSTICA Y PRINCIPIOS DE PROBABILIDAD

• Datos no agrupados

Medida descriptiva	Población	Muestra
Media	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Mediana	$l(m_d) = 0.5N + 0.5$	$l(\bar{x}) = 0.5n + 0.5$
Cuartil inferior	$l(Q_1) = 0.25N + 0.5$	$l(q_1) = 0.25n + 0.5$
Cuartil superior	$l(Q_3) = 0.75N + 0.5$	$l(q_3) = 0.75n + 0.5$
Amplitud intercuartílica	$A.I. = Q_3 - Q_1$	$a.i. = q_3 - q_1$
Desviación media a mediana	$D.M. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - m_d $	$d.m. = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i - l(\bar{x}) $
Varianza	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2$ $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\mu^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$

• **Análisis Exploratorio de datos**

Coefficiente de variación	$C.V. = \frac{\sigma}{\mu}$	$c.v. = \frac{s}{\bar{x}}$
Covarianza	$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$ $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \mu_X \mu_Y$	$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$
Coefficiente de correlación	$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$	$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

- x_i : i -ésima observación de la variable X .
 N : número de elementos en la población.
 n : número de observaciones en la muestra.
 $l(q)$: posición de q .

• **Datos agrupados**

Medida descriptiva	Población	Muestra
Media	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i m_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i m_i$
Mediana	$m_d = A + \frac{0.5 - C}{D} (B - A)$	$\tilde{x} = A + \frac{0.5 - C}{D} (B - A)$
Desviación media a mediana	$D.M. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i m_i - m_d $	$d.m. = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k f_i m_i - \tilde{x} $
Varianza	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i (m_i - \mu)^2$ $= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - N^2 \mu^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{x})^2$ $= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - n^2 \bar{x}^2$

- f_i : frecuencia absoluta de la i -ésima clase.
 k : número de clases en la distribución de frecuencias.
 m_i : marca de la i -ésima clase.
 A : Frontera inferior del intervalo de clase que contiene a la mediana.
 B : Frontera superior del intervalo de clase que contiene a la mediana.
 C : Frecuencia relativa acumulada hasta la clase anterior a la que contiene a la mediana.
 D : Frecuencia relativa de la clase que contiene a la mediana.

Variables aleatorias

• Esperanza, varianza y covarianza

	Discretas	Continuas
$\mu = E(X)$	$\sum_{x \in R_X} xP(X = x)$	$\int_{R_X} x f_X(x) dx$
$\sigma^2 = \text{Var}(X)$	$\sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 P(X = x)$	$\int_{R_X} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$
$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y)$	$\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xyP(X = x, Y = y)$ - $\sum_{x \in R_X} xP(X = x) \sum_{y \in R_Y} yP(Y = y)$	$\int_{R_X} \int_{R_Y} xyf(x, y) dy dx$ - $\int_{R_X} x f_X(x) dx \int_{R_Y} y f_Y(y) dy$

• Propiedades

$E(aX + b) = aE(X) + b$	$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$
$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$	$= E(XY) - E(X)E(Y)$
$= E(X^2) - E(X)^2$	$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$
$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$	$\rho = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$
$+ 2ab\text{Cov}(X, Y)$	

Algunas distribuciones de probabilidad

Distribución	Notación	Soporte R_X	Función de Probabilidad	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Uniforme discreta	$\text{unif}\{x_1, \dots, x_K\}$	$x \in \{x_1, \dots, x_K\}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i$	$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_i - E(X))^2$
Bernoulli	$\text{Be}(p)$	$x \in \{0, 1\}$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\text{Bin}(n, p)$	$x \in \{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\text{Po}(\lambda)$	$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	λ	λ
Uniforme continua	$\text{unif}(a, b)$	$a \leq x \leq b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$	μ	σ^2
Exponencial	$\text{Exp}(\theta)$	$0 \leq x < \infty$	$\frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$	θ	θ^2

Tablas de Probabilidad

Distribución Binomial

$$X \sim \text{Binom}(n, \theta)$$

$$p = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k} = 1 - \alpha$$

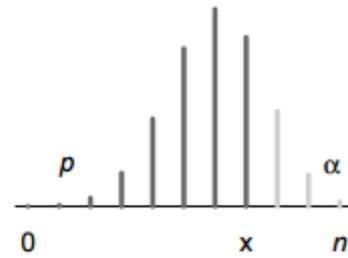


Tabla . Probabilidades acumuladas p de la distribución binomial ($n = 5, 6, 7, 8, 9$).

x	θ														
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	0.95	0.99
$n = 5$	0	0.951	0.774	0.590	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
	1	0.999	0.977	0.919	0.737	0.633	0.528	0.337	0.188	0.087	0.031	0.016	0.007	0.000	0.000
	2	1.000	0.999	0.991	0.942	0.896	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.104	0.058	0.009	0.001
	3	1.000	1.000	1.000	0.993	0.984	0.969	0.913	0.813	0.663	0.472	0.367	0.263	0.081	0.023
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.763	0.672	0.410	0.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 6$	0	0.941	0.735	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.999	0.967	0.886	0.655	0.534	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.005	0.002	0.000	0.000
	2	1.000	0.998	0.984	0.901	0.831	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.038	0.017	0.001	0.000
	3	1.000	1.000	0.999	0.983	0.962	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.169	0.099	0.016	0.002
	4	1.000	1.000	1.000	0.998	0.995	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.466	0.345	0.114	0.033
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.822	0.738	0.469	0.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 7$	0	0.932	0.698	0.478	0.210	0.133	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.998	0.956	0.850	0.577	0.445	0.329	0.159	0.063	0.019	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	2	1.000	0.996	0.974	0.852	0.756	0.647	0.420	0.227	0.096	0.029	0.013	0.005	0.000	0.000
	3	1.000	1.000	0.997	0.967	0.929	0.874	0.710	0.500	0.290	0.126	0.071	0.033	0.003	0.000
	4	1.000	1.000	1.000	0.995	0.987	0.971	0.904	0.773	0.580	0.353	0.244	0.148	0.026	0.004
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.981	0.938	0.841	0.671	0.555	0.423	0.150	0.044
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.972	0.918	0.867	0.790	0.522	0.302	0.068
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 8$	0	0.923	0.663	0.430	0.168	0.100	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.997	0.943	0.813	0.503	0.367	0.255	0.106	0.035	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	1.000	0.994	0.962	0.797	0.679	0.552	0.315	0.145	0.050	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000
	3	1.000	1.000	0.995	0.944	0.886	0.806	0.594	0.363	0.174	0.058	0.027	0.010	0.000	0.000
	4	1.000	1.000	1.000	0.990	0.973	0.942	0.826	0.637	0.406	0.194	0.114	0.056	0.005	0.000
	5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.950	0.855	0.685	0.448	0.321	0.203	0.038	0.006
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.965	0.894	0.745	0.633	0.497	0.187	0.057
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.942	0.900	0.832	0.570	0.337	0.077
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 9$	0	0.914	0.630	0.387	0.134	0.075	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.997	0.929	0.775	0.436	0.300	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	1.000	0.992	0.947	0.738	0.601	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	3	1.000	0.999	0.992	0.914	0.834	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.010	0.003	0.000	0.000
	4	1.000	1.000	0.999	0.980	0.951	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.049	0.020	0.001	0.000
	5	1.000	1.000	1.000	0.997	0.990	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.166	0.086	0.008	0.001
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.399	0.262	0.053	0.008
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.700	0.564	0.225	0.071	0.003
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.925	0.866	0.613	0.370	0.086
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Distribución Poisson

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

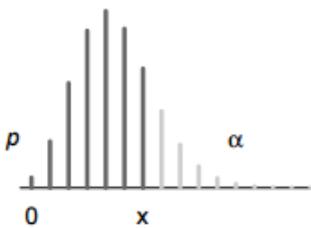
$$p = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - \alpha$$


Tabla . Probabilidades acumuladas p de la distribución Poisson.

x	λ									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla . Probabilidades acumuladas p de la distribución Poisson.

x	λ										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.406	0.199	0.092	0.040	0.017	0.007	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.677	0.423	0.238	0.125	0.062	0.030	0.014	0.006	0.003	0.000	0.000
3	0.857	0.647	0.433	0.265	0.151	0.082	0.042	0.021	0.010	0.000	0.000
4	0.947	0.815	0.629	0.440	0.285	0.173	0.100	0.055	0.029	0.001	0.000
5	0.983	0.916	0.785	0.616	0.446	0.301	0.191	0.116	0.067	0.003	0.000
6	0.995	0.966	0.889	0.762	0.606	0.450	0.313	0.207	0.130	0.008	0.000
7	0.999	0.988	0.949	0.867	0.744	0.599	0.453	0.324	0.220	0.018	0.001
8	1.000	0.996	0.979	0.932	0.847	0.729	0.593	0.456	0.333	0.037	0.002
9	1.000	0.999	0.992	0.968	0.916	0.830	0.717	0.587	0.458	0.070	0.005
10	1.000	1.000	0.997	0.986	0.957	0.901	0.816	0.706	0.583	0.118	0.011
11	1.000	1.000	0.999	0.995	0.980	0.947	0.888	0.803	0.697	0.185	0.021
12	1.000	1.000	1.000	0.998	0.991	0.973	0.936	0.876	0.792	0.268	0.039
13	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.987	0.966	0.926	0.864	0.363	0.066
14	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.983	0.959	0.917	0.466	0.105
15	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.992	0.978	0.951	0.568	0.157
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.973	0.664	0.221
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.995	0.986	0.749	0.297
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.993	0.819	0.381
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.875	0.470
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.917	0.559
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.947	0.644
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.967	0.721
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.981	0.787
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.989	0.843
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.888
26	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.922
27	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.948
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.966
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.978
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.987
31	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992
32	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995
33	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997
34	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
35	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
36	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

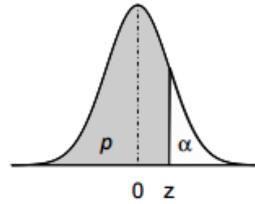
Distribución Normal Estándar

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$p = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \phi_Z(u) du = 1 - \alpha$$

donde

$$\phi_Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$



Nota: Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$. Luego,

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Tabla .. Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
-3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005
-3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007
-3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010
-3.0	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013
-2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
-2.8	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
-2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
-2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
-2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
-2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
-2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
-2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
-2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
-2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
-1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
-1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
-1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
-1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
-1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
-1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808
-1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968
-1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
-1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
-1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
-0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
-0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
-0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
-0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
-0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
-0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
-0.3	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
-0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
-0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
-0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

Tabla . Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998